PRMO 2017

1. How many positive integers less than 1000 have the property that the sum of the digits of each such number is divisible by 7 and the number itself is divisible by 3?

2. Suppose a, b are positive real numbers such that $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 183$, $a\sqrt{b} + b\sqrt{a} = 182$. Find $\frac{9}{5}(a + b)$.

3. A contractor has two teams of workers: team A and team B. Team A can complete a job in 12 days and team B can do the same job in 36 days. Team A starts working on the job and team B joins team A after four days. The team A withdraws after two more days. For how many more days should team B work to complete the job?

4. Let a, b be integers such that all the roots of the equation $(x^2 + ax + 20)(x^2 + 17x + b) = 0$ are negative integers. What is the smallest possible value of $a + b$?

5. Let u, v, w be real numbers in geometric progression such that $u > v > w$. Suppose $u^{40} = v^n = w^{60}$. Find the value of n.

6. Let the sum $\sum_{n=1}^{9} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ written in its lowest terms be $\frac{p}{q}$. Find the value of $q - p$.

7. Find the number of positive integers n, such that $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < 11$.

8 A pen costs ₹11 and a notebook costs ₹13. Find the number of ways in which a person can spend exactly ₹1000 to buy pens and notebooks.

9. There are five cities A, B, C, D, E on a certain island. Each city is connected to every other city by road. In how many ways can a person starting from city A come back to A after visiting some cities without visiting a city more than once and without taking the same road more than once? (The order in which he visits the cities also matters: e.g., the routes $A \to B \to C \to A$ and $A \to C \to B \to A$ are different.)

10. There are eight rooms on the first floor of a hotel, with four rooms on each side of the corridor, symmetrically situated (that is each room is exactly opposite to one other room). Four guests have to be accommodated in four of the eight rooms (that is, one in each) such that no two guests are in adjacent rooms or in opposite rooms. In how many ways can the guests be accommodated?

11. Let $f(x) = \sin\frac{x}{3} + \cos\frac{3x}{10}$ for all real x. Find the least natural number n such that $f(n\pi + x) = f(x)$ for all real x.

12. In a class, the total numbers of boys and girls are in the ratio $4 : 3$. On one day it was found that 8 boys and 14 girls were absent from the class, and that the number of boys was the square of the number of girls. What is the total number of students in the class?

13. In a rectangle $ABCD$, E is the midpoint of AB; F is a point on AC such that BF is perpendicular to AC; and FE perpendicular to BD. Suppose $BC = 8\sqrt{3}$. Find AB.

14. Suppose x is a positive real number such that $\{x\}, [x]$ and x are in a geometric progression. Find the least positive integer n such that $x^n > 100$. (Here $[x]$ denotes the integer part of x and $\{x\} = x - [x]$.)

15. Integers $1, 2, 3, \ldots, n$, where $n > 2$, are written on a board. Two numbers m, k such

that $1 < m < n$, $1 < k < n$ are removed and the average of the remaining numbers is found to be 17. What is the maximum sum of the two removed numbers?

16. Five distinct 2-digit numbers are in a geometric progression. Find the middle term.

17. Suppose the altitudes of a triangle are 10, 12 and 15. What is its semi-perimeter?

18. If the real numbers x, y, z are such that $x^2 + 4y^2 + 16z^2 = 48$ and $xy + 4yz + 2zx = 24$, what is the value of $x^2 + y^2 + z^2$?

19. Suppose 1, 2, 3 are the roots of the equation $x^4 + ax^2 + bx = c$. Find the value of c.

20. What is the number of triples (a, b, c) of positive integers such that (i) $a < b < c < 10$ and (ii) $a, b, c, 10$ form the sides of a quadrilateral?

21. Find the number of ordered triples (a, b, c) of positive integers such that $abc = 108$.

22. Suppose in the plane 10 pairwise nonparallel lines intersect one another. What is the maximum possible number of polygons (with finite areas) that can be formed?

23. Suppose an integer x, a natural number n and a prime number p satisfy the equation $7x^2 - 44x + 12 = p^n$. Find the largest value of p.

24. Let P be an interior point of a triangle ABC whose sidelengths are 26, 65, 78. The line through P parallel to BC meets AB in K and AC in L. The line through P parallel to CA meets BC in M and BA in N. The line through P parallel to AB meets CA in S and CB in T. If KL, MN, ST are of equal lengths, find this common length.

25. Let $ABCD$ be a rectangle and let E and F be points on CD and BC respectively such that area$(ADE) = 16$, area$(CEF) = 9$ and area$(ABF) = 25$. What is the area of triangle AEF?

26. Let AB and CD be two parallel chords in a circle with radius 5 such that the centre O lies between these chords. Suppose $AB = 6$, $CD = 8$. Suppose further that the area of the part of the circle lying between the chords AB and CD is $(m\pi + n)/k$, where m, n, k are positive integers with $\gcd(m, n, k) = 1$. What is the value of $m + n + k$?

27. Let Ω_1 be a circle with centre O and let AB be a diameter of Ω_1. Let P be a point on the segment OB different from O. Suppose another circle Ω_2 with centre P lies in the interior of Ω_1. Tangents are drawn from A and B to the circle Ω_2 intersecting Ω_1 again at A_1 and B_1 respectively such that A_1 and B_1 are on the opposite sides of AB. Given that $A_1B = 5$, $AB_1 = 15$ and $OP = 10$, find the radius of Ω_1.

28. Let p, q be prime numbers such that $n^{3pq} - n$ is a multiple of $3pq$ for **all** positive integers n. Find the least possible value of $p + q$.

29. For each positive integer n, consider the highest common factor h_n of the two numbers $n! + 1$ and $(n + 1)!$. For $n < 100$, find the largest value of h_n.

30. Consider the areas of the four triangles obtained by drawing the diagonals AC and BD of a trapezium $ABCD$. The product of these areas, taken two at time, are computed. If among the six products so obtained, two products are 1296 and 576, determine the square root of the maximum possible area of the trapezium to the nearest integer.

पी.आर.एम.ओ. 2017

1. ऐसे कितने धनात्मक पूर्णांक हैं जो 1000 से कम हैं, जिनके अंकों का योग 7 से विभजित हो जाता है और पूर्णांक स्वयं 3 से विभाजित हो जाता है?

2. मान लो कि a और b दो धनात्मक वास्तविक संख्या हैं और $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}=183$, $a\sqrt{b}+b\sqrt{a}=182$. तो $\frac{9}{5}(a+b)$ का मान ज्ञात करो।

3. एक ठेकेदार के पास मजदूरों की दो टोलियां हैं - टोली A और टोली B। टोली A एक काम को 12 दिनों में कर सकती है और टोली B उसी काम को 36 दिनों में कर सकती है। टोली A काम करना शुरू कर देती है और टोली B उसी काम में 4 दिनों के बाद मदद करने लगती है। टोली A काम को 2 दिन और करके काम करना छोड़ देती है। टोली B को काम खत्म करने के लिये और कितने दिन काम करना पड़ेगा?

4. मान लो कि a, b ऐसे पूर्णांक हैं कि समीकरण $(x^2+ax+20)(x^2+17x+b)=0$ के सभी हल ऋणात्मक पूर्णांक हैं। $a+b$ का न्यूनतम सम्भव मान क्या होगा ?

5. मान लो कि वास्तविक संख्या u, v, w गुणात्मक श्रेणी में हैं और $u>v>w$. यह भी मान लो कि $u^{40}=v^n=w^{60}$. तो फिर n का मान क्या होगा?

6. अगर जोड़ $\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ का मान $\frac{p}{q}$ है जहां p, q सहअभाज्य पूर्णांक हैं, तो $q-p$ का मान ज्ञात करो।

7. ऐसे धनात्मक पूर्णांक n कितने होंगे जिनके लिये $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<.01$?

8. एक कलम का मूल्य 11 रुपये होता है और एक नोटबुक का मूल्य 13 रुपये होता है। ठीक 1000 रुपये केवल कलम और नोटबुक पर ही खर्च करने हों तो ऐसा कितने तरीकों से किया जा सकता है?

9. एक द्वीप पर A, B, C, D, E नामक पाँच शहर हैं। हर दो शहरों के बीच में एक सड़क है। एक इंसान A से चलकर वापिस A तक ऐसे कितने तरीकों से सफ़र कर सकता है ताकि कोई भी सड़क दो बार ना लेनी पड़े और कोई भी शहर दो बार ना जाना पड़े? (किस क्रम मे शहर जा रहा है यह भी मायने रखता है: जैसे कि $A\to B\to C\to A$ और $A\to C\to B\to A$ को हम सफर के दो अलग तरीके मानेंगे।)

10. एक होटल की पहली मंजिल पर आठ कमरे हैं, और उनमे से चार बरामदे के एक तरफ हैं और चार बराबरी से बरामदे के दूसरी तरफ (मतलब हर कमरे के ठीक सामने बरामदे के दूसरी तरफ एक कमरा है।। चार मेहमानों को इनमे से चार कमरों में (मतलब एक कमरे में एक मेहमान) ऐसे ठहराना है कि न तो कोई दो मेहमान अगल-बगल के कमरों में हों, ना ही कोई दो मेहमान आमने-सामने के कमरों में हों। ऐसे कितने तरीकों से मेहमानों को ठहरा सकते हैं?

11. मान लो कि हर वास्तविक संख्या x के लिये $f(x)=\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{3x}{10}$. ऐसा सबसे छोटा धनात्मक पूर्णांक n कौन सा होगा जिसके लिये हर वास्तविक संख्या x के लिये $f(n\pi+x)=f(x)$.

12. एक कक्षा मे लड़के और लड़कियां $1:3$ के अनुपात में हैं। एक दिन पाया जाता है कि कक्षा मे 8 लड़के और 14 लड़कियां अनुपस्थित हैं और लड़कों की संख्या लड़कियों की संख्या का वर्ग है। कक्षा में कुल कितने लड़के-लड़कियां हैं?

13. $ABCD$ एक आयत है, AB की मध्य-बिंदु E है; F ऐसी बिंदु है जो AC पर है व रेखा BF रेखा AC के लम्ब है; और रेखा FE रेखा BD के लम्ब है। मान लो कि $BC=8\sqrt{3}$ । तो AB का मान ज्ञात करो।

14. मान लो कि x ऐसी धनात्मक वास्तविक संख्या है कि $\{x\}, [x]$ और x गुणात्मक श्रेणी में हैं। ऐसा सबसे छोटा पूर्णांक n ज्ञात करो जिसके लिये $x^n>100$ (यहां $[x]$ ऐसे सबसे बड़े पूर्णांक को चिन्हित करना है जो x से बड़ा नहीं है, और $\{x\}=x-[x]$)।

15. पूर्णांक $1, 2, 3, \ldots, n$ एक तख्ती पर लिखे हैं, यहाँ $n>2$। इनमे से दो संख्या m, k ऐसी हैं कि $1<m<n$, $1<k<n$, तख्ती से मिटा दी जाती हैं और बाकी संख्याओं का औसत 17 निकलता है। मिटा दी गई दो सन्ख्याओं का अधिकतम योग कितना हो सकता है?

16. पाँच अलग-अलग 2-अंकों की संख्याएँ गुणात्मक श्रेणी में हैं। इनमें से बीच की संख्या का मान ज्ञात करो।

17. मान लो कि एक त्रिभुज के अभिलम्बों की लम्बाई 10, 12 और 15 है । त्रिभुज की अर्ध-परिधि का मान क्या है?

18. अगर x, y, z ऐसी वास्तविक संख्या हैं जिनके लिये $x^2 + 4y^2 + 16z^2 = 48$ और $xy + 4yz + 2zx = 24$, तो $x^2 + y^2 + z^2$ का मान क्या होगा?

19. मान लो कि $x = 1, x = 2, x = 3$ समीकरण $x^4 + ax^2 + bx = c$ के हल हैं। c का मान ज्ञात करो।

20. ऐसे कितने समूह (a, b, c) हैं जिसमें a, b, c ऐसे धनात्मक पूर्णांक हैं जिनके लिये (क) $a < b < c < 10$ और (ख) $a, b, c, 10$ एक चतुर्भुज की भुजाओं की लम्बाईयां हैं?

21. ऐसे कितने क्रमवार समूह (a, b, c) हैं जिनमें a, b, c धनात्मक पूर्णांक हैं और $abc = 108$.

22. मान लो एक समतल में ऐसी दस रेखाएँ मिलती हैं जिनमें हर दो रेखाएँ आपस में असमांतर है । इन रेखाओं की आकृति से समतल में कई बाहुभुज बनते हैं । इस स्थिति में ऐसे अधिकतम कितने बाहुभुज बन सकते हैं जिनके क्षेत्रफल सीमित हैं ?

23. मान लो एक पूर्णांक x, एक प्राकृतिक संख्या n और एक रूढ़ संख्या p समीकरण $7x^2 - 44x + 12 = p^n$ को संतुष्ट करते हैं। p का अधिकतम मान क्या हो सकता है?

24. मान लो कि P एक ऐसी त्रिभुज ABC में अंतर्बिन्दु है जिसकी भुजाओं की लम्बाई 26, 65, 78 है। बिन्दु P से BC के समांतर रेखा AB से K में और AC से L में मिलती है। बिन्दु P से CA के समांतर रेखा BC से M में और BA से N में मिलती है। बिन्दु P से AB के समांतर रेखा CA से S में और CB से T में मिलती है। अगर KL, MN, ST की लम्बाई बराबर है, तो यह लम्बाई कितनी होगी?

25. मान लो कि $ABCD$ एक आयत है और E भुजा CD पर एवं F भुजा BC पर ऐसी बिन्दु हैं जिससे त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल = 16, त्रिभुज CEF का क्षेत्रफल = 9 और त्रिभुज ABF का क्षेत्रफल = 25, त्रिभुज AEF का क्षेत्रफल कितना है?

26. मान लो AB और CD एक वृत्त की समांतर जीवा है । वृत्त की त्रिज्या की लम्बाई 5 है, व वृत्त का केन्द्र O इन जीवाओं के बीच में पड़ता है। मान लो $AB = 6$ व $CD = 8$ हैं । मान लो कि जीवा AB व जीवा CD के बीच मे आने वाले वृत्त के क्षेत्र का क्षेत्रफल $(m\pi + n)/k$ है, जहाँ m, n, k ऐसे धनात्मक पूर्णांक हैं जिनके लिये म.स.$(m, n, k) = 1$, तो फिर $m + n + k$ का मान क्या होगा?

27. मान लो Ω_1 एक वृत्त है जिसका केन्द्र O है और AB वृत्त Ω_1 का व्यास है। मान लो P रेखाखंड OB पर एक बिन्दु है जो कि O से अलग है। मान लो Ω_1 के अंदर एक और वृत्त Ω_2 है जिसका केंद्र P है। A और B से Ω_2 की ऐसी स्पर्श-रेखाएँ खींचते हैं जो वृत्त Ω_1 से क्रमशः A_1, B_1 में मिलती हैं, व A_1, B_1 रेखाखंड AB के उल्टी तरफ हैं । अगर $A_1B = 5, AB_1 = 15$ व $OP = 10$ तो Ω_1 की त्रिज्या कितनी होगी?

28. मान लो कि p, q ऐसी रूढ़ संख्या हैं कि सभी धनात्मक पूर्णांक n के लिये $n^{3pq} - n$ का मान $3pq$ का गुणज है। $p + q$ का न्यूनतम संभव मान क्या है?

29. मान लो प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक n के लिये h_n का मान $(n! + 1)$ और $(n + 1)!$ का महत्तम समापवर्तक है। अगर $n < 100$ तो h_n अधिक से अधिक कितना हो सकता है?

30. $ABCD$ एक समलम्ब चतुर्भुज है । उसकी कर्णरेखाएँ AC और BD खींचने से वह चार त्रिभुजों में बंट जाता है। इन हिस्सो के क्षेत्रफल का दो-दो कर के गुणनफल लेते हैं। इन छह गुणनफलों मे दो के मान 1296 व 576 हैं। इस चतुर्भुज के अधिकतम संभव क्षेत्रफल का वर्गमूल सबसे करीबी पूर्णांक तक ज्ञात करो।