Resonance
Educating for better tomorrow

IIT-JEE 2012

PAPER - 2

PART - III : गणित (MATHEMATICS)

खण्ड - I : एकल सही उत्तर प्रकार

इस खण्ड में **8 बहुविकल्प प्रश्न** है। हर प्रश्न के चार उत्तर विकल्प (A, (B), (C) और (D) है जिनमें से **एक ही सही** है।

41. एक समतल, जो समतलों $x + 2y + 3z = 2$ और $x - y + z = 3$ की प्रतिच्छेदी रेखा से गुजरता है और बिन्दु $(3,1,-1)$ से $\frac{2}{\sqrt{3}}$ की दूरी पर है, का समीकरण निम्न है।

(A) $5x - 11y + z = 17$

(B) $\sqrt{2}x + y = 3\sqrt{2} - 1$

(C) $x + y + z = \sqrt{3}$

(D) $x - \sqrt{2}y = 1 - \sqrt{2}$

Sol. Ans. (A)

अभीष्ट समतल का समीकरण

$$(x + 2y + 3z - 2) + \lambda(x - y + z - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1 + \lambda)x + (2 - \lambda)y + (3 + \lambda)z - (2 + 3\lambda) = 0$$

बिन्दु $(3, 1, -1)$ से दूरी

$$= \left|\frac{3 + 3\lambda + 2 - \lambda - 3 - \lambda - 2 - 3\lambda}{\sqrt{(1+\lambda)^2 + (2-\lambda)^2 + (3+\lambda)^2}}\right| = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{-2\lambda}{\sqrt{3\lambda^2 + 4\lambda + 14}}\right| = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad 3\lambda^2 = 3\lambda^2 + 4\lambda + 14$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = -\frac{7}{2}$$

अभीष्ट समतल का समीकरण

$$5x - 11y + z - 17 = 0$$

42. यदि सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{29}$ और $\vec{a}\times(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}) = (2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}) \times \vec{b}$ है, तब $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (-7\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$ का एक सम्भावित मान निम्न होगा–

(A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 8

Sol. Ans. (C)

माना $\vec{c} = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$

$\vec{a}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{b}$

$\Rightarrow$ $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ $(\vec{a}+\vec{b}) \parallel \vec{c}$

माना $(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{c}$

$\Rightarrow$ $|\vec{a}+\vec{b}| = |\lambda|\,|\vec{c}|$

$\Rightarrow$ $\sqrt{29} = |\lambda| \cdot \sqrt{29}$

$\Rightarrow$ $\lambda = \pm 1$

$\therefore$ $\vec{a}+\vec{b} = \pm\,(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})$

अब $(\vec{a}+\vec{b}).(-7\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}) = \pm\,(-14 + 6 + 12)$

$= \pm 4$

43. त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल Δ है जिसके लिए $a = 2$, $b = \frac{7}{2}$ और $c = \frac{5}{2}$ है, जहाँ a, b और c क्रमशः कोण P, Q और R की सम्मुख भुजाओं की लम्बाईयाँ हैं। तब $\frac{2\sin P - \sin 2P}{2\sin P + \sin 2P}$ का मान निम्न है–

(A) $\frac{3}{4\Delta}$ (B) $\frac{45}{4\Delta}$ (C) $\left(\frac{3}{4\Delta}\right)^2$ (D) $\left(\frac{45}{4\Delta}\right)^2$

Sol. Ans. (C)

$a = 2 = QR$

$b = \frac{7}{2} = PR$

$c = \frac{5}{2} = PQ$

$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{8}{4} = 4$

$$\frac{2\sin P - 2\sin P\cos P}{2\sin P + 2\sin P\cos P} = \frac{2\sin P(1-\cos P)}{2\sin P(1+\cos P)} = \frac{1-\cos P}{1+\cos P} = \frac{2\sin^2\frac{P}{2}}{2\cos^2\frac{P}{2}} = \tan^2\frac{P}{2}$$

$$= \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)} = \frac{(s-b)^2(s-c)^2}{\Delta^2} = \frac{\left(4-\frac{7}{2}\right)^2\left(4-\frac{5}{2}\right)^2}{\Delta^2} = \left(\frac{3}{4\Delta}\right)^2$$

44. चार निष्पक्ष पाँसों (fair dice) D_1, D_2, D_3 और D_4 को, जिसमें प्रत्येक के छह फलकों (faces) पर संख्याएँ 1,2,3,4,5 एवं 6 अंकित हैं, एक साथ फेंका जाता है। पाँसे D_4 पर दर्शित संख्या के D_1, D_2 और D_3 पर दर्शित संख्याओं में से कोई एक होने की प्रायिकता (probability) निम्न है–

(A) $\frac{91}{216}$ (B) $\frac{108}{216}$ (C) $\frac{125}{216}$ (D) $\frac{127}{216}$

Sol. **Ans. (A)**

अनुकूल स्थितियाँ : D_4 एक संख्या प्रदर्शित करता है तथा

$D_1D_2D_3$ में से केवल एक वही संख्या प्रदर्शित करता है

या $D_1D_2D_3$ में से केवल दो वही संख्या प्रदर्शित करते है

या $D_1D_2D_3$ में से तीनों वही संख्या प्रदर्शित करते है

अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{{}^6C_1({}^3C_1 \times 5 \times 5 + {}^3C_2 \times 5 + {}^3C_3)}{216 \times 6}$

$$= \frac{6 \times (75+15+1)}{216 \times 6}$$

$$= \frac{6 \times 91}{216 \times 6}$$

$$= \frac{91}{216}$$

45. समाकल $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(x^2 + \ell n\frac{\pi+x}{\pi-x}\right)\cos x\,dx$ का मान निम्न है–

(A) 0 (B) $\frac{\pi^2}{2}-4$ (C) $\frac{\pi^2}{2}+4$ (D) $\frac{\pi^2}{2}$

Sol. **Ans. (B)**

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(x^2 + \ell n\left(\frac{\pi+x}{\pi-x}\right)\right)\cos x\,dx = 2\int_0^{\pi/2} x^2\cos x\,dx + 0 \qquad \left(\because \ell n\left(\frac{\pi+x}{\pi-x}\right) \text{is an odd function}\right)$$

$$= 2\left[\left(x^2\sin x\right)_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x\sin x\,dx\right]$$

$$= 2\left(\frac{\pi^2}{4}-0\right) - 4\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - 4\left[(-x\cos x)_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - 4$$

46. एक 3 × 3 आव्यूह (matrix) P इस प्रकार का है कि $P^T = 2P + I$, जहाँ P^T आव्यूह P का आव्यूह-परिवर्त (transpose) और I 3 × 3 का तत्समक आव्यूह है। तब एक स्तम्भ आव्यूह (column matrix) $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि

(A) $PX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (B) $PX = X$ (C) $PX = 2X$ (D) $PX = -X$

Sol. **Ans.** **(D)**

$P^T = 2P + I$

$\Rightarrow$ $(P^T)^T = (2P + I)^T$

$\Rightarrow$ $P = 2P^T + I$

$\Rightarrow$ $P = 2(2P + I) + I$

$\Rightarrow$ $3P = -3I$ $\Rightarrow$ $P = -I$

$\Rightarrow$ $PX = -IX = -X$

47. माना कि $a_1, a_2, a_3,\ldots\ldots$ हरात्मक श्रेणी (harmonic progression) में है जहाँ $a_1 = 5$ और $a_{20} = 25$ है। वह न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक n जिसके लिए $a_n < 0$ है, निम्न होगा–

(A) 22 (B) 23 (C) 24 (D) 25

Sol. **Ans.** **(D)**

संगत समान्तर श्रेढ़ी है

$\frac{1}{5},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{1}{25}$ (20 वाँ पद)

$\frac{1}{25} = \frac{1}{5} + 19\,d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{1}{19}\left(\frac{-4}{25}\right) = -\frac{4}{19\times 25}$

$a_n < 0$

$\frac{1}{5} - \frac{4}{19\times 25} \times (n-1) < 0$

$\frac{19\times 5}{4} < n - 1$

$n > 24.75$

48. माना कि समीकरण $\left(\sqrt[3]{1+a}-1\right)x^2+\left(\sqrt{1+a}-1\right)x+\left(\sqrt[6]{1+a}-1\right)=0$, जहाँ $a > -1$ है, के मूल $\alpha(a)$ और $\beta(a)$ है। तब $\lim\limits_{a\to0^+}\alpha(a)$ और $\lim\limits_{a\to0^+}\beta(a)$ के मान निम्न है–

(A) $-\frac{5}{2}$ और 1 (B) $-\frac{1}{2}$ और -1 (C) $-\frac{7}{2}$ और 2 (D) $-\frac{9}{2}$ और 3

Sol. **Ans.** **(B)**

$((1 + a)^{1/3} - 1)x^2 + ((a+1)^{1/2} - 1)x + ((a+1)^{1/6} - 1) = 0$

मानाकि $a + 1 = t^6$

$\therefore$ $(t^2 - 1)x^2 + (t^3 - 1)x + (t - 1) = 0$

$(t + 1)x^2 + (t^2 + t + 1)x + 1 = 0$

जब $a \to 0$ तब $t \to 1$

$2x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ तथा $x = -\frac{1}{2}$

खण्ड - II : अनुच्छेद प्रकार

इस खण्ड में **3 अनुच्छेदों (Paragraphs) से संबंधित 6 बहुविकल्प प्रश्न** है। जिन में से हर अनुच्छेद पर दो प्रश्न है। हर प्रश्न के चार उत्तर विकल्प (A, (B), (C) और (D) है जिनमें से **केवल एक सही है।**

प्रश्न 49 से 50 के लिए अनुच्छेद

माना कि $f(x) = (1 - x)^2 \sin^2 x + x^2$ जहाँ $x \in IR$ और $g(x) = \int_1^x \left(\frac{2(t-1)}{t+1} - \ell nt\right) f(t)\, dt$, जहाँ $x \in (1, \infty)$.

49. निम्न में से कौन सा कथन सही है ?

(A) $(1, \infty)$ में g वर्धमान (increasing) है।

(B) $(1, \infty)$ में g ह्रासमान (decreasing) है।

(C) $(1, 2)$ में g वर्धमान (increasing) है और $(2, \infty)$ में ह्रासमान (decreasing) है।

(D) $(1, 2)$ में g ह्रासमान (decreasing) है और $(2, \infty)$ में वर्धमान (increasing) है।

Sol. **Ans.** **(B)**

$f(x) = (1 - x)^2 \sin^2 x + x^2 : x \in R$

$$g(x) = \int_1^x \left(\frac{2(t-1)}{t+1} - \ln t\right) f(t)dt$$

$$\therefore g'(x) = \left(\frac{2(x-1)}{x+1} - \ln x\right) f(x) \,.\, 1$$

मानाकि $\phi(x) = \frac{2(x-1)}{x+1} - \ln x$

$$\phi'(x) = \frac{2[(x+1)-(x-1).1]}{(x+1)^2} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{-x^2+2x-1}{x(x+1)^2} = \frac{-(x-1)^2}{x(x+1)^2}$$

$\therefore \quad \phi'(x) \le 0$

$\therefore \quad$ for $x \in (1, \infty)$, $\phi(x) < 0$

$\therefore \quad g'(x) < 0 \qquad x \in (1, \infty)$ के लिए

50. दिये गये कथन है :

P : एक ऐसी संख्या $x \in IR$ का अस्तित्व है जिसके लिए $f(x) + 2x = 2(1 + x^2)$

Q : एक ऐसी संख्या $x \in IR$ का अस्तित्व है जिसके लिए $2f(x) + 1 = 2x(1 + x)$

तब निम्न में से कौनसा कथन सही है ?

(A) P और Q दोनों सत्य है
(B) P सत्य है और Q असत्य है
(C) P असत्य है और Q सत्य है
(D) P और Q दोनों असत्य है।

Sol. **Ans. (C)**

$f(x) + 2x = (1 - x)^2 \sin^2 x + x^2 + 2x$

$\because \quad f(x) + 2x = 2(1 + x^2)$

$\Rightarrow \quad (1 - x)^2 \sin^2 x + x^2 + 2x = 2 + 2x^2$

$(1 - x)^2 \sin^2 x = x^2 - 2x + 1 + 1$

$= (1 - x)^2 + 1$

$\Rightarrow \quad (1 - x)^2 \cos^2 x = -3$

जो कि सम्भव नही हो सकता

P असत्य है।

$\Rightarrow$ मानाकि $H(x) = 2f(x) + 1 - 2x(1 + x)$

$H(0) = 2f(0) + 1 - 0 = 1$

$H(1) = 2f(1) + 1 - 4 = -1$

$\Rightarrow$ इसलिए $H(x)$ का एक हल है।

अतः Q सत्य है।

प्रश्न 51 से 52 के लिए अनुच्छेद

मानाकि a_n उन सभी n-अंकों वाले धनात्मक पूर्णांकों (n-digit positive integers) की संख्या है जो 0, 1 अथवा दोनों अंकों से बनते है और जिनमें अंक 0 क्रमिक (consecutive) नहीं है। मान लें कि b_n = उपरोक्त उन सभी n-अंकों वाले धनात्मक पूर्णांकों की संख्या जिनके अंत में अंक 1 है, और c_n= उपरोक्त उन सभी n-अंकों वाले धनात्मक पूर्णांकों की संख्या जिनके अंत में अंक 0 है।

51. निम्न में से कौन सा कथन सही है ?

(A) $a_{17} = a_{16} + a_{15}$
(B) $c_{17} \ne c_{16} + c_{15}$
(C) $b_{17} \ne b_{16} + c_{15}$
(D) $a_{17} = c_{17} + b_{16}$

Sol. **Ans. (A)**

1---------------- 1 # a_{n-1}

---------------- 1 0 # a_{n-2}

इसलिए विकल्प A सही है।

विकल्प B पर विचार कीजिए $c_{17} \neq c_{16} + c_{15}$

$c_{15} \neq c_{14} + c_{13}$ असत्य है

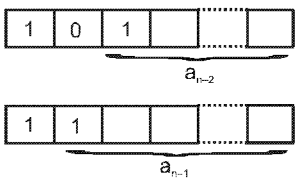
विकल्प C पर विचार कीजिए $b_{17} \neq b_{16} + c_{16}$

$a_{16} \neq a_{15} + a_{14}$ असत्य है

विकल्प D पर विचार कीजिए $a_{17} = c_{17} + b_{16}$

$a_{17} = a_{15} + a_{15}$ जो कि असत्य है

वैकल्पिक



Recursion सूत्र का उपयोग करने पर

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

इसी तरह $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ and $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ $\quad \forall\ n \geq 3$

तथा $\quad a_n = b_n + c_n \quad \forall\ n \geq 1$

अतः $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$..........

$b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$, $b_4 = 3$, $b_5 = 5$, $b_6 = 8$ ....

$c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1$, $c_4 = 2$, $c_5 = 3$, $c_6 = 5$ ....

उपयोग करने पर $b_{n-1} = c_n \ \forall\ n \geq 2$

52. b_6 का मान क्या है ?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 11

Sol. **Ans. (B)**

$b_6 = a_5$

$a_5 = \underline{1} - - - \underline{1} \qquad \underline{1} - - - \underline{0}$

${}^3C_0 + {}^3C_1 + 1 + {}^2C_1 + 1$

$1 + 3 + 1 + 2 + 1$

$4 + 4 = 8$

प्रश्न 53 से 54 के लिए अनुच्छेद

स्पर्श–रेखा PT वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ को बिन्दु $P(\sqrt{3}, 1)$ पर स्पर्श करती है। सरल रेखा L, PT के लम्बवत् है और वृत्त $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ की स्पर्श–रेखा है।

53. दोनों वृत्तो की एक उभयनिष्ठ स्पर्श–रेखा (common tangent) निम्न है

(A) $x = 4$ (B) $y = 2$ (C) $x + \sqrt{3}\, y = 4$ (D) $x + 2\sqrt{2}\, y = 6$

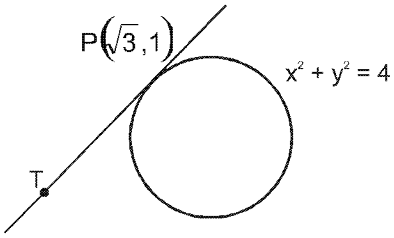
Ans. (D)

54. L का एक सम्भावित समीकरण निम्न है –

(A) $x - \sqrt{3}\,y = 1$ (B) $x + \sqrt{3}\,y = 1$ (C) $x - \sqrt{3}\,y = -1$ (D) $x + \sqrt{3}\,y = 5$

Ans. **(A)**

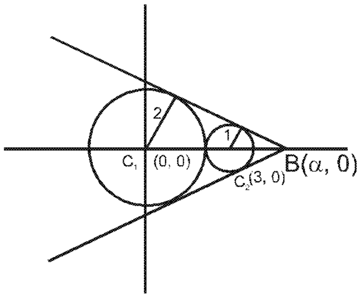
Sol. **Q.No. 53 to 54**



स्पर्शरेखा का समीकरण $(\sqrt{3}, 1)$ पर

$\sqrt{3}x + y = 4$

53.



$B, C_1\, C_2$ को 2 : 1 में बाह्य विभाजित करता है

$\therefore$ B(6, 0)

अतः उभयनिष्ट स्पर्शरेखा का समीकरण है

$y - 0 = m(x - 6)$

$mx - y - 6m = 0$

(0, 0) से स्पर्शरेखा पर लम्ब की लम्बाई = त्रिज्या

$$\left|\frac{6m}{\sqrt{1+m^2}}\right| = 2 \Rightarrow m = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

इसलिए समीकरण है $x + 2\sqrt{2}\,y = 6$ या $x - 2\sqrt{2}\,y = 6$

54. L का समीकरण है

$x - y\sqrt{3} + c = 0$

वृत्त के केन्द्र से डाले गए लम्ब की लम्बाई = वृत्त की त्रिज्या

$$\therefore \left|\frac{3+C}{2}\right| = 1 \Rightarrow C = -1, -5$$

$\therefore x - \sqrt{3}\,y = 1$ या $x - \sqrt{3}\,y = 5$

खण्ड - III : बहुल सही उत्तर प्रकार

इस खण्ड में **6 बहुविकल्प प्रश्न** है। हर प्रश्न के चार उत्तर विकल्प (A, (B), (C) और (D) है जिनमें से **एक या अधिक** सही है।

55. दो घटनायें X और Y इस प्रकार की हैं कि $P(X \mid Y) = \frac{1}{2}$, $P(Y \mid X) = \frac{1}{3}$ और $P(X \cap Y) = \frac{1}{6}$ । तब निम्न में से कौन कथन सही है/हैं ?

(A) $P(X \cup Y) = \frac{2}{3}$ (B) X और Y स्वतंत्र हैं (C) X और Y स्वतंत्र नहीं हैं (D) $P(X^c \cap Y) = \frac{1}{3}$

Sol. Ans. (AB)

$P(X/Y) = \frac{1}{2}$

$\frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{1}{2} \Rightarrow P(Y) = \frac{1}{3}$

$P(Y/X) = \frac{1}{3}$

$\frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{1}{3} \Rightarrow P(X) = \frac{1}{2}$

$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = \frac{2}{3}$ A सही है

$P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(X) \Rightarrow$ X और Y स्वतंत्र है B सही है

$P(X^c \cap Y) = P(Y) - P(X \cap Y)$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ D सही नही है

56. यदि सभी $x \in (0, \infty)$ के लिये $f(x) = \int_0^x e^{t^2}(t-2)(t-3)\,dt$, तब

(A) x = 2 पर f का स्थानीय उच्चतम (local maximum) है

(B) (2, 3) में f ह्रासमान (decreasing) है

(C) किसी संख्या $c \in (0, \infty)$ के लिये $f''(c) = 0$ है

(D) x = 3 पर f का स्थानीय न्यूनतम (local minimum) है

Sol. **Ans.** **(ABCD)**

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2} \cdot (t-2)(t-3)\,dt$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{x^2} \cdot (x-2)\,(x-3)$$

$$\underset{}{+}\quad \underset{2}{|}\quad - \quad \underset{3}{|}\quad +$$

max. (2) minima (3)

(i) $x = 2$ पर स्थानीय अधिकतम है (ii) $x = 3$ पर स्थानीय न्यूनतम है

(iii) यह $x \in (2, 3)$ के ह्रासमान है

(iv) $f''(x) = e^{x^2} \cdot (x-2) + e^{x^2}(x-3) + 2x\,e^{x^2}(x-2)\,(x-3)$

$= e^{x^2} \cdot [x - 2 + x - 3 + 2x(x-2)(x-3)]$

$f''(x) = 0$

$f''(x) = e^{x^2}(2x^3 - 10x^2 + 14x - 5)$

$f''(0) < 0$ और $f''(1) > 0$

इसीलिए $f''(c) = 0$ जहाँ $c \in (0, 1)$

57. माना कि प्रत्येक पूर्णांक n के लिये, a_n और b_n वास्तविक संख्यायें हैं। फलन $f : IR \to IR$ निम्न प्रकार से परिभाषित है :

$$f(x) = \begin{cases} a_n + \sin \pi x, & \text{यदि } x \in [2n, 2n+1] \\ b_n + \cos \pi x, & \text{यदि } x \in (2n-1, 2n) \end{cases}$$, प्रत्येक पूर्णांक n के लिये।

यदि f सतत (continuous) है, तब प्रत्येक n के लिये, निम्न में से कौन कथन सही है/हैं ?

(A) $a_{n-1} - b_{n-1} = 0$ (B) $a_n - b_n = 1$ (C) $a_n - b_{n+1} = 1$ (D) $a_{n-1} - b_n = -1$

Sol. **Ans.** **(BD)**

$$\left.\begin{aligned} f(2n) &= a_n \\ f(2n^+) &= a_n \\ f(2n^-) &= b_n + 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a_n &= b_n + 1 \\ a_n - b_n &= 1 \end{aligned}$$

इसलिए B सत्य है।

$$\left.\begin{aligned} f(2n+1) &= a_n \\ f((2n+1)^-) &= a_n \\ f((2n+1)^+) &= b_{n+1} - 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a_n &= b_{n+1} - 1 \\ a_n - b_{n+1} &= -1 \\ a_{n-1} - b_n &= -1 \end{aligned}$$

इसलिए D सत्य है।

58. यदि सरल रेखायें $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{k} = \frac{z}{2}$ और $\frac{x+1}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{k}$ समतलीय (coplanar) हैं तो वह (वे) समतल जिसमें ये दोनों रेखायें स्थित हैं, निम्न है (हैं)

(A) $y + 2z = -1$ (B) $y + z = -1$ (C) $y - z = -1$ (D) $y - 2z = -1$

Sol. Ans. (B,C)

दो समतलीय रेखाओं के लिए $[\vec{a}-\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{d}] = 0$

$\vec{a} \equiv (1, -1, 0)$, $\vec{c} = (-1, -1, 0)$

$\vec{b} = 2\hat{i} + k\hat{j} + 2\hat{k}$ $\vec{d} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + k\hat{k}$

अब $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & k & 2 \\ 5 & 2 & k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \pm 2$

$\vec{n}_1 = \vec{b}_1 \times \vec{d}_1 = 6\hat{j} - 6\hat{k}$, k = 2 के लिए

$\vec{n}_2 = \vec{b}_2 \times \vec{d}_2 = 14\hat{j} + 14\hat{k}$, k = – 2 के लिए

इसलिए समतल की समीकरण है $(\vec{r} - \vec{a}).\vec{n}_1 = 0 \Rightarrow y - z = -1$ ...... (1)

$(\vec{r} - \vec{a}).\vec{n}_2 = 0 \Rightarrow y + z = -1$ ...... (2)

इसलिए उत्तर (B,C) है।

59. यदि 3 × 3 आव्यूह (matrix) P का सहखंडज (adjoint) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ है तो P के सारणिक (determinant) का (के) सम्भावित मान है (हैं)

(A) –2 (B) –1 (C) 1 (D) 2

Sol. Ans. (AD)

माना $A = [a_{ij}]_{3\times3}$

$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$|\text{adj } A| = 1(3-7) - 4(6-7) + 4(2-1) = 4$

$\Rightarrow |A|^{3-1} = 4$

$\Rightarrow |A|^2 = 4$

$\Rightarrow |A| = \pm 2$

60. फलन f : (–1, 1) $\to$ IR इस प्रकार का है कि $f(\cos 4\theta) = \dfrac{2}{2-\sec^2\theta}$ जहाँ $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ तब $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ का (के) मान है (हैं)

(A) $1 - \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ (B) $1 + \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ (C) $1 - \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (D) $1 + \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Sol. Ans. (AB)

$\cos4\theta = \dfrac{1}{3} \Rightarrow 2\cos^2 2\theta - 1 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \cos^2 2\theta = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \cos2\theta = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

अब $f(\cos4\theta) = \dfrac{2}{2-\sec^2\theta} = \dfrac{1+\cos2\theta}{\cos2\theta} = 1 + \dfrac{1}{\cos2\theta} \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 1 \pm \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

NOTE : चूंकि फलन में किसी पूर्व प्रतिबिम्ब 1/3 की दो प्रतिबिम्ब नहीं हो सकती हैं अतः यह इस प्रश्न में अस्पष्ट है इसलिए उत्तर **A** या **B** या **AB** या सभी को अंक दिये जायेगें।