Resonance
Educating for better tomorrow

IIT-JEE 2012

PAPER - 1

PART - III : गणित (MATHEMATICS)

खण्ड - I : एकल सही उत्तर प्रकार

इस खण्ड में **10 बहुविकल्प प्रश्न** है। हर प्रश्न के चार उत्तर विकल्प (A, (B), (C) और (D) है जिनमें से **एक ही सही** है।

41. बिन्दु P बिंदुओं Q(2, 3, 5) और R(1, –1, 4) से गुजरने वाली सरल रेखा एवं समतल $5x - 4y - z = 1$ का प्रतिच्छेदी बिंदु है। यदि बिंदु T(2, 1, 4) से QR पर डाले गये लम्ब का लम्ब–पाद S है तो रेखा–खण्ड PS की लम्बाई निम्न है–

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) $2\sqrt{2}$

Sol. Ans. (A)

QR का समीकरण होगा

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{1}$$

माना $P \equiv (2 + \lambda, 3 + 4\lambda, 5 + \lambda)$

$$10 + 5\lambda - 12 - 16\lambda - 5 - \lambda = 1$$

$$-7 - 12\lambda = 1$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{-2}{3}$$

तो $P \equiv \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$

माना $S = (2 + \mu, 3 + 4\mu, 5 + \mu)$

$$\vec{TS} = (\mu)\hat{i} + (4\mu + 2)\hat{j} + (\mu + 1)\hat{k}$$

$$\vec{TS} \cdot (\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}) = 0$$

$$\mu + 16\mu + 8 + \mu + 1 = 0$$

$$\mu = -\frac{1}{2}$$

$$S = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{9}{2}\right)$$

$$PS = \sqrt{\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{4}{9}+\left(\frac{13}{3}-\frac{9}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{36}+\frac{4}{9}+\frac{1}{36}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{18}+\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

42. समाकलन $\int \frac{\sec^2 x}{(\sec x+\tan x)^{9/2}}dx$ का मान निम्न है (किसी यादृच्छिक अचर (arbitrary constant) K के लिये)

(A) $\frac{-1}{(\sec x+\tan x)^{11/2}}\left\{\frac{1}{11}-\frac{1}{7}(\sec x+\tan x)^2\right\}$ + K

(B) $\frac{1}{(\sec x+\tan x)^{11/2}}\left\{\frac{1}{11}-\frac{1}{7}(\sec x+\tan x)^2\right\}$ + K

(C) $\frac{-1}{(\sec x+\tan x)^{11/2}}\left\{\frac{1}{11}+\frac{1}{7}(\sec x+\tan x)^2\right\}$ + K

(D) $\frac{1}{(\sec x+\tan x)^{11/2}}\left\{\frac{1}{11}+\frac{1}{7}(\sec x+\tan x)^2\right\}$ + K

Sol. **Ans (C)**

secx + tanx = t रखने पर

$(\sec x \tan x + \sec^2 x)\, dx = dt$

secx . t dx = dt

$\sec x - \tan x = \frac{1}{t}$

$\sec x = \frac{t+\frac{1}{t}}{2}$

$$\int \frac{\sec x.dt}{t^{9/2}.t} = \int \frac{1}{2}\frac{\left(t+\frac{1}{t}\right)}{t.t^{9/2}}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^{9/2}}+\frac{1}{t^{13/2}}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{7t^{7/2}}+\frac{2}{11t^{11/2}}\right]+k$$

$$= -\frac{1}{t^{11/2}}\left[\frac{t^2}{7}+\frac{1}{11}\right]+k$$

43. माना कि z एक सम्मिश्र संख्या है जिसका काल्पनिक भाग शून्य नहीं है और $a = z^2 + z + 1$ वास्तविक है। तब वह मान जो a नहीं ले सकता, निम्न है

(A) –1 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$

Sol. Ans (D)

यहाँ $z^2 + z + 1 - a = 0$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$$

यहाँ $a \neq \frac{3}{4}$ अन्यथा z विशुद्ध वास्तविक होगा।

44. दिया है कि $f(x) = \begin{cases} x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, x \in IR$ तब f

(A) x = 0 एवं x = 2 दोनों पर अवकलनीय है

(B) x = 0 पर अवकलनीय है परन्तु x = 2 पर अवकलनीय नहीं है

(C) x = 0 पर अवकलनीय नहीं है परन्तु x = 2 पर अवकलनीय है

(D) x = 0 एवं x = 2 दोनों पर अवकलनीय नहीं है

Sol. Ans (B)

(I) x = 0 पर अवकलनीयता के लिये –

$$\text{L.H.D.} = f'(0^-) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0-h)-f(0)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2.\left|\cos\left(-\frac{\pi}{h}\right)\right| - 0}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} -h \,.\, \left|\cos\frac{\pi}{h}\right| = 0$$

$$\text{RHD} \quad f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2.\left|\cos\left(\frac{\pi}{h}\right)\right| - 0}{h} = 0$$

अतः x = 0 पर f(x) अवकलनीय है।

(ii) x = 2 पर अवकलनीयता के लिये –

$$\text{RHD} = f'(2^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h)^2.\left|\cos\left(\frac{\pi}{2+h}\right)\right| - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h)^2.\cos\left(\frac{\pi}{2+h}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h)^2.\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2+h}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h)^2.\sin\left(\frac{\pi h}{2(2+h)}\right)}{\left(\frac{\pi}{2(2+h)}\right)h} . \frac{\pi}{2(2+h)}$$

$$= (2)^2 . \frac{\pi}{2(2)} = \pi$$

LHD $= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h}$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2-h)^2.\left|\cos\left(\frac{\pi}{2-h}\right)\right| - 0}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2-h)^2.\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2-h}\right)\right) - 0}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2-h)^2 \cos\left(\frac{\pi}{2-h}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2-h)^2.\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2-h}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2-h)^2.\sin\left(-\frac{\pi h}{2(2-h)}\right)}{\left(-\frac{\pi h}{2(2-h)}\right)} . \frac{-\pi}{2(2-h)} = -\pi$$

अतः $x = 2$ पर $f(x)$ अवकलनीय नहीं है।

45. विभिन्न रंगों की पांच गेंदों को तीन लोगों में इस प्रकार बाँटने के कुल तरीकों की संख्या जिसमें प्रत्येक व्यक्ति को कम से कम एक गेंद अवश्य मिले, निम्न है

(A) 75 (B) 150 (C) 210 (D) 243

Sol. Ans (B)

	B_1	B_2	B_3
Case-1:	1	1	3
Case-2:	2	2	1

बाँटने के तरीके $= \frac{5!}{1!1!3!2!} \cdot 3! + \frac{5!}{2!2!1!2!} \cdot 3!$

$= 150$

46. यदि $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x+1} - ax - b\right) = 4$ है, तब

(A) a = 1, b = 4 (B) a = 1, b = –4

(C) a = 2, b = –3 (D) a = 2, b = 3

Sol. Ans (B)

$$\ell im_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x+1} - ax - b\right) = 4$$

$$\ell im_{x\to\infty}\left(\frac{x^2(1-a)+x(1-a-b)+(1-b)}{x+1}\right) = 4$$

सीमा परिमित है।

यह विद्यमान होगी यदि $1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$

तब $\ell im_{x\to\infty}\left(\frac{1-a-b+\frac{1-b}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) = 4$

$\therefore \quad 1 - a - b = 4 \quad \Rightarrow \quad b = -4$

47. फलन $f : [0, 3] \to [1, 29]$, जो निम्नानुसार परिभाषित किया गया है

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$, निम्न प्रकार का है

(A) ऐकिक (one-one) और आच्छादक (onto) (B) आच्छादक है पर ऐकिक नहीं

(C) ऐकिक है पर आच्छादक नहीं (D) न ऐकिक है न ही आच्छादक

Sol. Ans (B)

$F : [0, 3] \to [1, 29]$

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$

$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$

$= 6(x^2 - 5x + 6)$

$= 6(x - 2)(x - 3)$

\+ – +
0 2 3

दिये गये प्रान्त में फलन स्थानीय उच्चिष्ठ रखता है। अः यह बहुऐकी है।

अब $x = 0$ पर $f(0) = 1$

$x = 2 \quad f(2) = 16 - 60 + 72 + 1 = 29$

$x = 3 \quad f(3) = 54 - 135 + 108 + 1$

$= 163 - 135 = 28$

अतः परिसर $= [1, 29]$

अतः दिया गया फलन आच्छादक है।

48. सरल रेखा $4x - 5y = 20$ के बिन्दुओं से वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ पर डाली गयी स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा (chord of contact) के मध्य बिन्दु का बिन्दु पथ (locus) निम्न है

(A) $20(x^2 + y^2) - 36x + 45y = 0$ (B) $20(x^2 + y^2) + 36x - 45y = 0$

(C) $36(x^2 + y^2) - 20x + 45y = 0$ (D) $36(x^2 + y^2) + 20x - 45y = 0$

Sol. **Ans (A)**

वृत्त है: $x^2 + y^2 = 9$

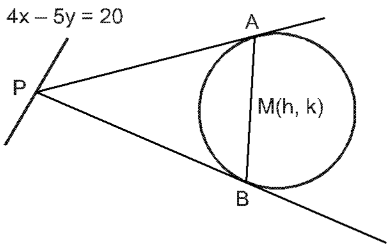
सरल रेखा है: $4x - 5y = 20$

$P\left(t, \frac{4t-20}{5}\right)$

जीवा AB जिसका मध्य बिन्दु M (h, k) है का समीकरण है :

$T = S_1$

$\therefore \quad hx + ky = h^2 + k^2 \quad$ ....(1)



बिन्दु P के सापेक्ष स्पर्श जीवा AB का समीकरण

$T = 0$

$tx + \left(\frac{4t-20}{5}\right)y = 9 \quad$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) की तुलना करने पर

$$\frac{h}{t} = \frac{5k}{4t-20} = \frac{h^2+k^2}{9}$$

हल करने पर

$45k = 36h - 20h^2 - 20k^2$

$\Rightarrow$ बिन्दुपथ है : $20(x^2 + y^2) - 36x + 45y = 0$

49. माना कि $P = [a_{ij}]$ एक 3×3 आव्यूह (matrix) है और $Q = [b_{ij}]$, जहाँ $b_{ij} = 2^{i+j}a_{ij}$ जब $1 \le i, j \le 3$ है। यदि P के सारणिक (determinant) का मान 2 है तो आव्यूह Q के सारणिक का मान निम्न है

(A) 2^{10} (B) 2^{11} (C) 2^{12} (D) 2^{13}

Sol. **Ans (D)**

दिया गया है $P = [a_{ij}]_{3\times3} \quad b_{ij} = 2^{i+j}$ aij

$Q = [b_{ij}]_{3\times3}$

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad |P| = 2$$

$$Q = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a_{11} & 8a_{12} & 16a_{13} \\ 8a_{21} & 16a_{22} & 32a_{23} \\ 16a_{31} & 32a_{32} & 64a_{33} \end{bmatrix}$$

Q का सारणिक = $\begin{vmatrix} 4a_{11} & 8a_{12} & 16a_{13} \\ 8a_{21} & 16a_{22} & 32a_{23} \\ 16a_{31} & 32a_{32} & 64a_{33} \end{vmatrix}$

$$= 4 \times 8 \times 16 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 4a_{31} & 4a_{32} & 4a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 8 \times 16 \times 2 \times 4 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$= 2^2 . 2^3 . 2^4 . 2^1 . 2^2 . 2^1$

$= 2^{13}$

50. आयत R जिसकी भुजायें निर्देशांक अक्षों के समान्तर है के अन्दर दीर्घवृत्त $E_1 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ को उत्कीर्णित (inscribe) किया गया है। एक अन्य दीर्घवृत्त E_2 जो बिन्दु (0, 4) से गुजरता है और आयत R को परिगत (circumscribe) करता है, की उत्केन्द्रता (eccentricity) निम्न है

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$

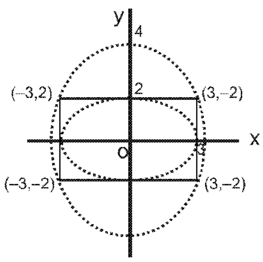
Sol. **Ans (C)**

माना कि अभीष्ट दीर्घवृत्त है

$E_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

यह बिन्दु (0, 4) से गुजरता है :

$0 + \frac{16}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 16$



यह बिन्दु (±3, ±2) से भी गुजरता है

$\frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$

$\frac{9}{a^2} + \frac{1}{4} = 1$

$\frac{9}{a^2} = \frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ $a^2 = b^2 (1 - e^2)$

$\frac{12}{16} = 1 - e^2$

$e^2 = 1 - \frac{12}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{16}$

$e = \frac{1}{2}$

खण्ड - II : बहुल सही उत्तर प्रकार

इस खण्ड में **5 बहुविकल्प प्रश्न** है। हर प्रश्न के चार उत्तर विकल्प (A, (B), (C) और (D) है जिनमें से **एक या अधिक** सही है।

51. यदि y(x) अवकल समीकरण $y' - y \tan x = 2x \sec x$ को संतुष्ट करता है और $y(0) = 0$, तब

(A) $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}$ (B) $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{18}$

(C) $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{9}$ (D) $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi^2}{3\sqrt{3}}$

Sol. Ans (AD)

$\frac{dy}{dx} - y \tan x = 2x \sec x$

$y(0) = 0$

I.F. $= e^{-\int \tan x\, dx} = e^{-\log \sec x}$

I.F. $= \cos x$

$\cos x \cdot y = \int 2x \sec x . \cos x\, dx$

$\cos x . y = x^2 + c$

$c = 0$

$y = x^2 \sec x$

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{16}.\sqrt{2} = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}$

$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.\sqrt{2} + \frac{\pi^2}{16}.\sqrt{2}$

$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{9}.2 = \frac{2\pi^2}{9}$

$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\frac{\pi}{2}.2+\frac{\pi^2}{9}.2.\sqrt{3}$

$\frac{4\pi}{3}+\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9}$

52. एक जहाज में तीन इंजन E_1, E_2, और E_3 लगे हैं जो एक दूसरे से स्वतंन्त्र रूप से कार्य करते है और जिनके कार्य करने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{4}$ है। जहाज को चलने के लिये कम से कम दो इंजनों का कार्य करना आवश्यक है। माना कि जहाज चलने की घटना X है और E_1, E_2 और E_3 के कार्य करने की घटनायें क्रमशः X_1, X_2, और X_3 है। तो निम्न में से कौन सही है/हैं ?

(A) $P\left[X_1^c \mid x\right]=\frac{3}{16}$

(B) P[दो और केवल दो (exactly two) इंजन कार्य कर रहे हैं। X] = $\frac{7}{8}$

(C) $P[X \mid X_2] = \frac{5}{16}$

(D) $P[X \mid X_1] = \frac{7}{16}$

Sol. **Ans (BD)**

$P(x_1) = \frac{1}{2}$

$P(x_2) = \frac{1}{4}$

$P(x_3) = \frac{1}{4}$

$P(x) = P(E_1E_2E_3) + P(\overline{E}_1E_2E_3) + P(E_1\overline{E}_2E_3) + P(E_1E_2\overline{E}_3)$

$= \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{3}{4}$

$P(x) = \frac{1}{4}$

(A) $P\left(\frac{x_1^c}{x}\right) = \frac{P(x_1^c \cap x)}{P(x)}$

$= \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}$

(B) P(ठीक दो घटनाएँ / x) = $\frac{P(\text{ठीक दो घटनाएँ} \cap x)}{P(x)}$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{7}{8}$$

(C) $P(x / x_2) = \dfrac{P(x \cap x_2)}{P(x_2)} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}$

$$= \frac{5}{8}$$

(D) $P(x / x_1) = \dfrac{P(x \cap x_1)}{P(x_1)}$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{7}{16}$$

53. मानाकि $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$ इस प्रकार है कि $2\cos\theta(1 - \sin\phi) = \sin^2\theta\left(\tan\frac{\theta}{2} + \cot\frac{\theta}{2}\right)\cos\phi - 1$, $\tan(2\pi - \theta) > 0$ और $-1 < \sin\theta < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. तब ϕ निम्न में से किसको संतुष्ट नहीं कर सकता ?

(A) $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{4\pi}{3}$ (C) $\frac{4\pi}{3} < \phi < \frac{3\pi}{2}$ (D) $\frac{3\pi}{2} < \phi < 2\pi$

Sol. Ans (ACD)

चूंकि $\tan(2\pi - \theta) > 0$, $-1 < \sin\theta < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{3}$

अब $2\cos\theta(1 - \sin\phi) = \sin^2\theta(\tan\theta/2 + \cot\theta/2)\cos\phi - 1$

$\Rightarrow 2\cos\theta(1 - \sin\phi) = 2\sin\theta\cos\phi - 1$

$\Rightarrow 2\cos\theta + 1 = 2\sin(\theta + \phi)$

चूंकि $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow 2\cos\theta + 1 \in (1, 2)$

$\Rightarrow 1 < 2\sin(\theta + \phi) < 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < \sin(\theta + \phi) < 1$

चूंकि $\theta + \phi \in [0, 4\pi]$

$\Rightarrow \theta + \phi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ or $\theta + \phi \in \left(\frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow \frac{\pi}{6} - \theta < \phi < \frac{5\pi}{6} - \theta$ or $\frac{13\pi}{6} - \theta < \phi < \frac{17\pi}{6} - \theta$

$\Rightarrow \phi \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{-2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right)$ $\left(\because \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)\right)$

$\therefore$ [सही विकल्प (A, C, D) है।]

54. यदि $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ और $x = 1$ द्वारा परिबद्ध (enclosed) क्षेत्र का क्षेत्रफल S है तो

(A) $S \geq \frac{1}{e}$ (B) $S \geq 1 - \frac{1}{e}$ (C) $S \leq \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ (D) $S \leq \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{e}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Sol. Ans (ABD)

$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$

$-x^2 \leq 0$

$e^{-x^2} \leq 1$

$\int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$

$x^2 \leq x \Rightarrow -x^2 \geq -x \Rightarrow e^{-x^2} \geq e^{-x}$

$\Rightarrow I \geq \int_0^1 e^{-x} dx$

$\geq -\left(e^{-x}\right)_0^1$

$\geq -\left(\frac{1}{e} - 1\right)$

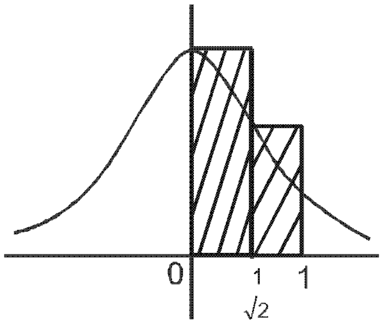
$I \geq 1 - \frac{1}{e}$ $\Rightarrow$ विकल्प (B) सही है

चूंकि $I \geq 1 - \frac{1}{e}$ $\Rightarrow I > \frac{1}{e}$ $\Rightarrow$ विकल्प (A) सही है

$I < \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 + \frac{1}{\sqrt{e}} \times (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$

अतः विकल्प (D) सही है

[अतः विकल्पA, B तथा D सही है]



55. अतिपरवलय $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, पर सरल रेखा $2x - y = 1$ के समान्तर स्पर्श रेखाये खींची गयी है। इन स्पर्श रेखाओं के अतिपरवलय पर स्पर्श बिन्दु (points of contacts) निम्न है

(A) $\left(\frac{9}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (B) $\left(-\frac{9}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (C) $\left(3\sqrt{3}, -2\sqrt{2}\right)$ (D) $\left(-3\sqrt{3}, 2\sqrt{2}\right)$

Sol. Ans (AB)

स्पर्शरेखा की प्रवणता = 2

स्पर्शरेखा की समीकरण $y = 2x \pm \sqrt{9.4 - 4}$

$\Rightarrow y = 2x \pm \sqrt{32}$

$\Rightarrow 2x - y \pm 4\sqrt{2} = 0$ ....(i)

माना स्पर्श बिन्दु (x_1, y_1) है

तो समीकरण (i), समीकरण $\frac{xx_1}{9} - \frac{yy_1}{4} - 1 = 0$ के सर्वसम होगी

$$\therefore \frac{x_1/9}{2} = \frac{y_1/4}{1} = \frac{-1}{\pm 4\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow (x_1, y_1) \equiv \left(-\frac{9}{2\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \text{ and } \left(\frac{9}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

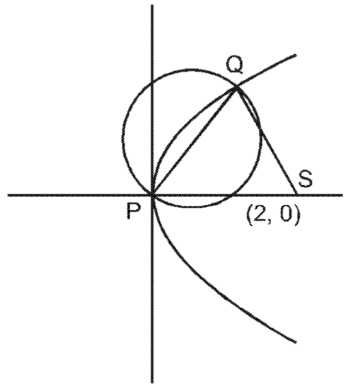
खण्ड - III : पूर्णांक उत्तर प्रकार

इस खण्ड में 5 प्रश्न है। इर प्रश्न का उत्तर **एक अंक का पूर्णांक**, 0 से 9 (दोनों सहित), तक है।

56. परवलय (parabola) $y^2 = 8x$ की नाभि (focus) S है और PQ इस परवलय और वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ की उभयनिष्ठ जीवा (common chord) है। त्रिभुज PQS का क्षेत्रफल है।

Sol. Ans (4)

नाभि $S \equiv (2, 0)$. बिन्दु $P \equiv (0, 0)$ और $Q = (4t, 2t^2)$



त्रिभुज PQS का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2t^2 & 4t & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(8t) = 4t$ ......(i)

Q $(2t^2, 4t)$ वृत्त को सन्तुष्ट करता है

$4t^4 + 16t^2 - 4t^2 - 16t = 0$

$t^3 + 3t - 4 = 0$

$(t - 1)(t^2 + t + 4) = 0$

$t = 1$ रखने पर PQS का क्षेत्रफल

$\Rightarrow$ PQS का क्षेत्रफल 4 है।

57. माना कि $p(x)$ न्यूनतम घात का वह वास्तविक बहुपद (real polynomial) है जिसका एक स्थानीय उच्चतम (local maximum) $x = 1$ पर है और एक स्थानीय न्यूनतम (local minimum) $x = 3$ पर है। यदि $p(1) = 6$ और $p(3) = 2$ है तब $p'(0)$ का मान है

Sol. Ans (9)

$p' = \lambda(x - 1)(x - 3) = \lambda(x^2 - 4x + 3)$

$p(x) = \lambda(x^3/3 - 2x^2 + 3x) + \mu$

$p(1) = 6$

$6 = \lambda(1/3 - 2 + 3) + \mu$

$6 = \lambda(1/3 + 1) + \mu$

$18 = 4\lambda + 3\mu$ ...(i)

$p(3) = 2$

$2 = \lambda(27/3 - 2 \times 9 + 9) + \mu$

$2 = \mu$

$\mu = 2 \Rightarrow \lambda = 3$

$p'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$

$p'(0) = 3(-1)(-3)$

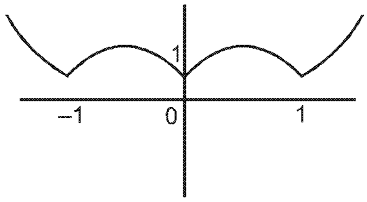
$= 9$

58. माना कि $f : IR \to IR$ जिसको $f(x) = |x| + |x^2 - 1|$ से परिभाषित किया गया है। जहाँ f का एक स्थानीय उच्चतम (local maximum) या एक स्थानीय न्यूनतम (local minimum) है, उन सभी बिंदुओं की कुल संख्या है।

Sol. **Ans (5)**

$f(x) = |x| + |x^2 - 1|$

$$f(x) = \begin{cases} -x + x^2 - 1 & x < -1 \\ -x - x^2 + 1 & -1 \le x \le 0 \\ x - x^2 + 1 & 0 < x < 1 \\ x + x^2 - 1 & x \ge 1 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & x < -1 \\ -x^2 - x + 1 & -1 \le x \le 0 \\ -x^2 + x + 1 & 0 < x < 1 \\ x^2 + x - 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

59. पद $6 + \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{4 - \frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{4 - \frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{4 - \frac{1}{3\sqrt{2}}....}}}\right)$ का मान है।

Sol. **Ans (4)**

माना $\sqrt{4 - \frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{4 - \frac{1}{3\sqrt{2}}.......}} = t$

$\sqrt{4 - \frac{1}{3\sqrt{2}}t} = t$

$4 - \frac{1}{3\sqrt{2}}t = t^2 \Rightarrow$

$t^2 + \frac{1}{3\sqrt{2}}t - 4 = 0 \Rightarrow 3\sqrt{2}t^2 + t - 12\sqrt{2} = 0$

$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 3\sqrt{2} \times 12\sqrt{2}}}{2 \times 3\sqrt{2}} = \frac{-1 \pm 17}{2 \times 3\sqrt{2}}$

$t = \frac{16}{6\sqrt{2}}, \frac{-18}{6\sqrt{2}}$

$t = \frac{8}{3\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}$ और $\frac{-3}{\sqrt{2}}$ निरस्त होगा

अतः $6 + \log_{3/2}\left(\frac{1}{3\sqrt{2}} \times \frac{8}{3\sqrt{2}}\right) = 6 + \log_{3/2}\left(\frac{4}{9}\right)$

$= 6 + \log_{3/2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)$

$= 6 - 2 = 4$

60. यदि $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ इकाई सदिश (unit vectors) हैं जो

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 + |\vec{b} - \vec{c}|^2 + |\vec{c} - \vec{a}|^2 = 9$,

को संतुष्ट करते हैं तब $|2\vec{a} + 5\vec{b} + 5\vec{c}|$ का मान है।

Sol. **Ans (3)**

$6 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{b}\cdot\vec{c} - 2\vec{c}\cdot\vec{a} = 9$

$\left(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}\right) = \frac{-3}{2}$

$\left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right|^2 \geq 0$

$3 + 2\left(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}\right) \geq 0$

$\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a} \geq \frac{-3}{2}$

चूंकि $\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a} = \frac{-3}{2}$

$\Rightarrow \left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right| = 0 \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$

$\Rightarrow \left|2\vec{a} + 5(-\vec{a})\right| = |3\vec{a}| \Rightarrow 3$